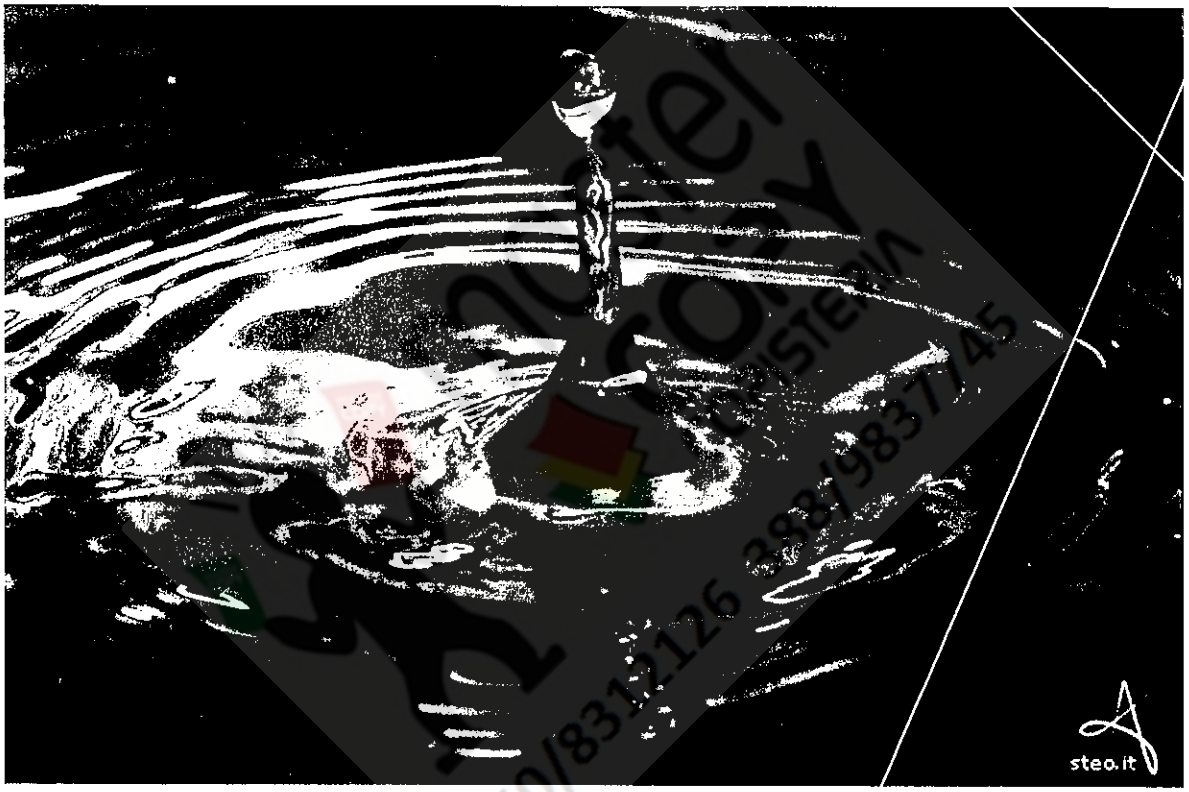
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745



Idraulica

Università degli studi di Pisa

A.A. 2012/2013

Argomenti: idrostatica assoluta, cinematica, dinamica, foronomia, spinte idrodinamiche, correnti in pressione, correnti a superficie libera, macchine idrauliche, transitori nelle correnti in pressione e moti di filtrazione

Castagna Edoardo

26/01/2014

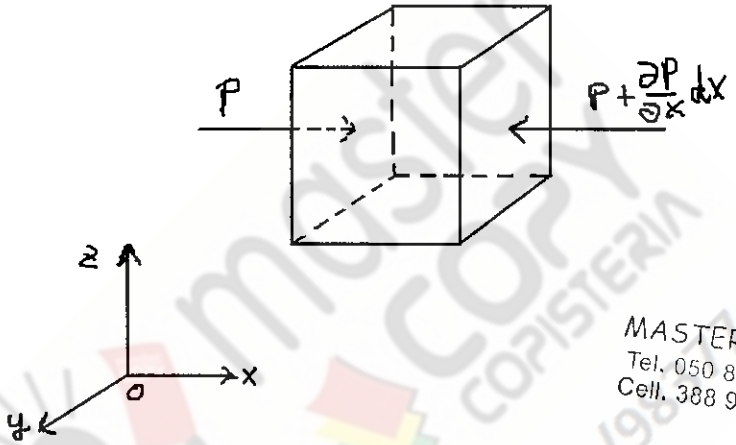
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

master
COPY
COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

Statica dei Fluidi

Dimostrazione dell'equazione indefinita

Consideriamo un fluido (per esempio acqua) in quiete all'interno di un recipiente. Ora consideriamo un volumetto infinitesimo $dxdydz$ e indichiamo le forze che agiscono su di esso: forze di massa (forze di tipo gravitazionali) e forze di superfici (forze di pressione ortogonali alle facce del cubetto, ovviamente gli sforzi tangenziali si trascurano).



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Le forze di massa si scrivono come

$$\rho\vec{F}dxdydz = \left(\rho F_x dxdydz\,\hat{\imath} + \rho F_y dxdydz\,\hat{\jmath} + \rho F_z dxdydz\,\hat{k}\right)$$

Le forze di superficie, invece, si scrivono lungo i tre assi: vediamo lungo l'asse x

$$Pdydz - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x}dx\right)dydz = -\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz$$

Analogamente con lo stesso procedimento si fanno le altre due direzioni

$$-\frac{\partial P}{\partial y}dxdydz \quad e \quad -\frac{\partial P}{\partial z}dxdydz$$

$$\vec{\pi} = \left(-\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz\,\hat{\imath} - \frac{\partial P}{\partial y}dxdydz\,\hat{\jmath} - \frac{\partial P}{\partial z}dxdydz\,\hat{k}\right)$$

Facciamo l'equilibrio delle forze che agiscono sul volumetto:

$$\rho\vec{F}\,dxdydz - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial P}{\partial y}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial P}{\partial z}\,\hat{k}\right) dxdydz = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho\vec{F} - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial P}{\partial y}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial P}{\partial z}\,\hat{k}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho\vec{F} = \overrightarrow{\nabla P}}$$

dove $P = P(x, y, z)$.

Questa equazione è indefinita proprio perché è riferita ad un volumetto di fluido infinitesimo e deve essere verificata in ogni punto della massa fluida.

Estendiamo la formula sopra ad un volume di fluido finito, W

$$\int_W \rho\vec{F}\ dW = \int_W \vec{\nabla}\cdot\vec{P}\,dW \Rightarrow \int_W \rho\vec{F}\ dW - \int_A \vec{P}\cdot(-\hat{n})\,dA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_W \rho\vec{F}\ dW + \int_A \vec{P}\cdot\hat{n}\,dA = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{G} + \vec{\pi} = 0}$$

dove

$$\vec{G} = \int_W \rho\vec{F}\ dW$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

rappresenta la risultante di tutte le forze di massa

$$\vec{\pi} = \int_A \vec{P}\cdot\hat{n}\,dA$$

rappresenta la risultante di tutte le forze di pressione agenti sul contorno del volume di fluido finito.

La formula incasellata è l'equazione globale della statica dei fluidi.

Dato che abbiamo parlato di forze di massa e superficie, facciamo una premessa approfondendo meglio l'argomento su di esse.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Forze agenti sui fluidi

In genere la forza costituisce la causa in grado di modificare lo stato di quiete o di moto di una sostanza ed è caratterizzata in generale da una grandezza o modulo, da una direzione, da un verso e da un punto di applicazione. Poiché tra gli scopi della fluidomeccanica vi è quello di valutare il moto delle particelle (in termini infinitesimi) ed il moto di un intero sistema finito (in termini globali o integrali) sotto l'azione delle forze agenti, è necessario prendere in esame quali sono effettivamente le forze che possono interessare i fluidi. Innanzitutto le forze che hanno pratico interesse in fluidomeccanica possono essere classificate in funzione della loro natura:

(1) forze posizionali: dipendono dalle coordinate di applicazione (le forze conservative sono forze posizionali);

(2) forze che dipendono dal campo di velocità (per esempio le forze dovute alla resistenza del mezzo e le azioni di portanza);

(3) forze che dipendono dal tempo (le forze che intervengono nei fenomeni oscillatori);

(4) forze costanti che non dipendono da alcun parametro.

Tra le forze posizionali un particolare interesse è rivestito dalle forze conservative (per esempio la forza gravitazionale o le forze centrifughe), le quali possono essere espresse come gradiente di una funzione potenziale ($F = \nabla\theta$); sono forze che compiono lavoro senza produrre dissipazioni in calore. Le forze di natura ripartita agenti sopra una massa fluida sono interne o esterne e sono caratterizzate dalla loro intensità per cui sarà opportuno definire le rispettive forze unitarie. Le forze interne nascono per effetto dell'interazione mutua che le particelle esercitano le une sulle altre. Per il principio di azione e reazione queste forze interne si bilanciano ed hanno anche momento risultante nullo, per cui costituiscono un sistema equilibrato; pertanto non intervengono nelle equazioni cardinali della statica e della dinamica, figurando invece, ovviamente, nell'equazione dell'energia, poiché danno luogo ad un lavoro non nullo che è a causa di perdite di carico. L'esame delle forze esterne, la cui analisi viene condotta a termine facendo uso del metodo delle sezioni